Correction du Devoir Maison 2

Solution de l'exercice 1.

1. La hauteur du sablier est de H. Puisque les cônes sont identiques, on en déduit que la hauteur d'un seul cône est de $OB = \frac{H}{2}$. Donc
$$x(t) = O'B = OB - OO' = \frac{H}{2} - h(t).$$

2. On se place dans le triangle OAB. Les droites (OA) et $(O'A')$ sont parallèles. Donc d'après le théorème de Thalès,
$$\frac{O'A'}{OA} = \frac{BO'}{BO} = \frac{x(t)}{\frac{H}{2}}.$$
Donc
$$O'A' = \frac{x(t)}{\frac{H}{2}} \times OA = \frac{x(t)}{\frac{H}{2}} \times R = \frac{2x(t)R}{H}.$$

3. Le volume du tas de sable est égal au volume du cône de base le cercle de centre O et de sommet B moins le volume du cône de base le cercle de centre O' et de sommet B. On rappelle que le volume d'un cône est $\pi \times$ (rayon du disque de base)$^2 \times$ hauteur/3. Donc
$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{\pi}{3}OA^2 \times OB - \frac{\pi}{3}O'A' \times O'B \\ &= \frac{\pi}{3}R^2\frac{H}{2} - \frac{\pi}{3}\left(\frac{2x(t)R}{H}\right)^2 \times x(t) \\ &= \frac{\pi R^2 H}{6} - \frac{\pi}{3}\frac{4x(t)^2R^2}{H^2}x(t) \\ &= \frac{\pi R^2 H}{6} - \frac{4\pi x(t)^3 R^2}{3H^2}. \end{aligned}$$

4. A $t = 0$, on a $h(0) = 1$. Donc, d'après la question 1,
$$x(0) = \frac{H}{2} - h(0) = \frac{4}{2} - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ m}.$$
Donc d'après la question 3,
$$v(0) = \frac{\pi R^2 H}{6} - \frac{4\pi x(0)^3 R^2}{3H^2} = \frac{\pi 1^2 \times 4}{6} - \frac{4\pi 1^3 1^2}{3 \times 4^2} \simeq 1,83 \text{ m}^3.$$
De la même façon, on a $h(-15) = \frac{1}{2}$. Donc
$$x(-15) = \frac{H}{2} - h(-15) = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ m}.$$
D'où,
$$v(-15) = \frac{\pi R^2 H}{6} - \frac{4\pi x(-15)^3 R^2}{3H^2} = \frac{\pi 1^2 \times 4}{6} - \frac{4\pi \left(\frac{3}{2}\right)^3 1^2}{3 \times 4^2} \simeq 1.21 \text{ m}^3.$$

5. La fonction v est une fonction affine passant par les points $(-15; 1.21)$ et $(0; 1,83)$. Donc la pente a de la fonction v est donnée par
$$a = \frac{1,83 - 1,21}{0-(-15)} = \frac{0,62}{15} \simeq 0,04.$$
6. L'ordonnée à l'origine de v est la valeur de l'image de 0 par v, c'est-à-dire la valeur de $v(0)$:
$$v(0) \simeq 1,83.$$
En prenant ces valeurs numériques, on obtient l'expression algébrique suivante :
$$v(t) = 0,04t + 1,83.$$
7. Le délai imparti s'achèvera lorsque tout le sable se sera écoulé, c'est-à-dire lorsque le sable aura rempli tout le cône du bas. Donc lorsque le volume $v(t)$ sera égal à celui du cône total :
$$v(t) = \frac{\pi}{3}R^2\frac{H}{2} = \frac{\pi}{3}1^2\frac{4}{2} = \frac{2\pi}{3}.$$
Or d'après la question précédente, $v(t) = 0,04t + 1,83$. Donc
$$0,04t + 1,83 = 2\pi \qquad \Leftrightarrow \qquad 0,04t = \frac{2\pi}{3} - 1,83 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \frac{2\pi - 1,83}{0,04} \simeq 6,61 \text{ jours.}$$
Il reste moins de 7 jours à Numérobis pour finir son palais... Pour les curieux qui veulent savoir quand le sablier a été initialement retourné, cela correspond au temps t lorsque le volume du sable tombé était égal à 0 :
$$\begin{aligned} v(t) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad 0,04t + 1,83 = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad 0,04t = -1,83 \\ &\Leftrightarrow \qquad t = \frac{-1,83}{0,04} \simeq 46 \text{ jours} \simeq \text{un mois et demi.} \end{aligned}$$
Or chacun sait que Numérobis a eu trois mois pour faire son palais. Ce devoir maison serait-il une arnaque ?

Solution de l'exercice 2.

1. La première question est juste calculatoire. Chaque fréquence n'apparaît qu'une seule fois. La moyenne n'est donc pas pondérée :
$$\begin{aligned} m &= \frac{\text{somme des fréquences}}{\text{nombre de fréquences}} \\ &= \frac{15,87 + 9,42 + 8,41 + 7,9 + 7,26 + 7,15 + \cdots + 0,77 + 0,32 + 0,3 + 0,24 + 0 + 0}{26} \\ &= 3,85\% \end{aligned}$$
En moyenne la fréquence d'apparition d'une lettre est de $3,85\%$.
2. Le nombre de lettres est de 26 et $26/4 = 6,5$. Donc le premier quartile est la 7ième valeur. Attention par convention, on ordonne les valeurs par ordre croissant. C'est donc la 7ième plus petite valeur, c'est-à-dire celle de la lettre j :
$$Q_1 = 0,89\%.$$
De façon similaire, $3 * 26/4 = 3 * 6,5 = 19,5$. Le troisième quartile correspond à la 20ième valeur :
$$Q_3 = 6,46\%.$$

3. Dans un mot de langue française, la lettre qui suit n'est pas indépendante de la lettre précédente. Par exemple si la lettre précédente est un « a » il est extrêmement peu probable que la lettre suivante soit encore un « a » car on ne trouve guère de mot contenant la syllabe « aa » en français. L'hypothèse d'indépendance est donc une hypothèse pratique mais peu plausible ici.
4. La proposition du cours donnant l'intervalle de fluctuation à 95% n'est valide que sous la condition d'avoir $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$. Cependant, ici toutes les valeurs théoriques sont inférieures à $0,16$:
$$p \leqslant 0,16 < 0,2.$$
On ne peut donc pas appliquer la proposition du cours.
5. Le texte compte 375 lettres ce qui correspond à la taille de l'échantillon, $n = 375$ qui est naturellement plus grand que 30. Il faut donc vérifier que $np > 5$ et $n(1-p) > 5$. C'est-à-dire
$$p > \frac{5}{n} = \frac{5}{375} = 0,0133 = 1,33\% \qquad \text{et} \qquad 1-p > 0,0133 \quad \Leftrightarrow \quad p < 1 - 0,0133 = 0,9867.$$
On en déduit à l'aide du tableau que seulement pour les lettres e, a, i, s, t, n, r, u, l, o, d, m, p, c et v il est possible de construire un intervalle de fluctuation à 95%.
6. Comme $n = 375$, on a $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,0516 = 5,16\%$. Donc l'intervalle de fluctuation de la lettre e est
$$[15,87 - 5,16; 15,87 + 5,16] = [10,71; 21,03]$$
Voici un tableau donnant les intervalles de fluctuation à 95% :

Lettre	e	a	i	s	t	n	r
Fréquence	$15,87$	$9,42$	$8,41$	$7,9$	$7,26$	$7,15$	$6,46$
Intervalle	$[10,71;21,03]$	$[4,26;14,58]$	$[3,25;13,57]$	$[2,74;13,06]$	$[2,1;12,42]$	$[1,99;12,31]$	$[1,3;11,62]$

Lettre	u	l	o	d	m	p	c	v
Fréquence	$6,24$	$5,34$	$5,14$	$3,39$	$3,24$	$2,86$	$2,64$	$2,15$
Intervalle	$[1,08;11,4]$	$[0,18;10,5]$	$[0;10,3]$	$[0;8,55]$	$[0;8,4]$	$[0;8,02]$	$[0;7,8]$	$[0;7,31]$

7. Voici le tableau des fréquences des lettres du texte (nombre d'occurrences divisé par 375 fois cent) :

Lettre	n	b	j	w	r	u	l	a,m	c, d	v
Nombre d'occurrences	71	35	31	28	26	24	22	19	18	14
Fréquence (en %)	$18,93$	$9,33$	$8,27$	$7,45$	$6,93$	$6,4$	$5,87$	$5,07$	$4,8$	$3,73$

Lettre	x	y	z	h, o, q	p	e, g, k	t	f, i, s
Nombre d'occurrences	13	8	7	4	3	2	1	0
Fréquence	$3,47$	$2,13$	$1,87$	$1,07$	$0,8$	$0,53$	$0,27$	0

La lettre la plus fréquente est donc largement la lettre n. Sa fréquence de $18,93\%$ ne peut appartenir qu'à l'intervalle $[10,71; 21,03]$. Donc avec 95% de chance, la lettre n correspond dans le texte initial à la lettre e.

8. La deuxième lettre la plus fréquente est le b avec une fréquence de $9,33\%$ qui appartient aux intervalles $[4,26;14,58]$, $[3,25;13,57]$, $[2,74;13,06]$, $[2,1;12,42]$, $[1,99;12,31]$, $[1,3;11,62]$, $[1,08;11,4]$, $[0,18;10,5]$ et $[0;10,3]$. Les lettres candidates sont donc déjà beaucoup plus nombreuses pour la lettre b, elle peut correspondre à la lettre a, i, s, t, n, r, u, l et o.
9. Grâce à la question 7, on sait que la lettre e est devenue n que le décalage appliqué est donc de 9. Voici donc les équivalences des lettres :

Origine	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Codé	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i

10. En utilisant le tableau de la question précédente, on obtient le texte suivant : Al Kindi est un savant arabe du dix-neuvième siècle qui s'est intéressé à de nombreuses sciences allant de la géométrie à la médecine et à la chimie. Dans le « Manuscrit sur le chiffrement des messages cryptographiques » il explique comment casser les meilleurs codes connus à son époque, à l'aide de la technique de l'analyse de fréquence. C'est la première trace connue de cryptanalyse. Par conséquent, il est considéré comme l'un des fondateurs de la discipline.

Solution de l'exercice 3.

1. La largeur l est donnée par
$$l = h + 2R$$
et la longueur par le périmètre du couvercle :
$$L = 2\pi R.$$
Donc
$$a = l \times L = (h + 2R) \times 2\pi R.$$
2. On en déduit que
$$\frac{a}{2\pi R} = h + 2R \qquad \Leftrightarrow h = \frac{a}{2\pi R} - 2R,$$
ce qui est bien la formule recherchée.
3. On sait que le volume du cylindre est de
$$\mathscr{V} = \pi R^2 h.$$
En utilisant la question précédente, on obtient,
$$\mathscr{V} = \pi R^2 \left(\frac{a}{2\pi R} - 2R\right).$$
On développe :
$$\mathscr{V} = \frac{\pi R^2 a}{2\pi R} - \pi R^2 \times 2R = \frac{Ra}{2} - 2\pi R^3.$$
4. Dans l'algorithme, A est la valeur précédente du volume et B la valeur suivante. Donc on regarde si $A < B$ ou non. Si $A < B$, on poursuit la boucle « tant que » et l'on augmente la valeur de R d'un pas P. Voici en conséquence l'algorithme complété

   - $R \leftarrow 0$
   - Demander P
   - $A \leftarrow 301,5 * R - 2 * \pi * R^3$

- $B \leftarrow 301,5 * (R+P) - 2 * \pi * (R+P)^3$
- Tant que $A<B$
- $\quad R \leftarrow R+P$
- $\quad A \leftarrow B$
- $\quad B \leftarrow 301,5 * (R+P) - 2 * \pi * (R+P)^3$
- Findetantque
- Retourner R et A.

5. En testant l'algorithme avec un pas $P = 0,1$, on obtient $R_{max} = 4$ cm et $V_{max} \simeq 804$ cm.
6. On en déduit que
$$h = \frac{a}{2\pi R} - 2R = \frac{603}{2\pi \times 4} - 2 \times 4 \simeq 16 \text{ cm}.$$